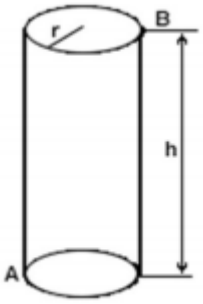
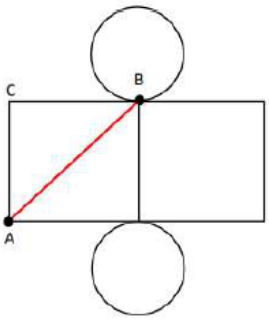
Colégio Olimpo
Canguru de Matemática Brasil 2020
Resolução KangoTreino
Nível S - 3ª série do Ensino Médio

01. Uma formiga vai do ponto A ao ponto B andando sobre a superfície do cilindro. Sabendo que r = 1 e h = 6, quanto mede o caminho mais curto que a formiga pode percorrer entre esses pontos?



a) 7
b) 8
c) $2\sqrt{10}$
d) $\sqrt{\pi^2+36}$
e) $2\sqrt{\pi^2+9}$

Resolução Questão 01: Alternativa D
Fatos que ajudam: num cilindro circular reto, as seções transversais verticais, que são as interseções dos planos verticais que recortam o cilindro com o próprio sólido, são retângulos. Além disso, quando recortamos o sólido e fazemos sua planificação, a superfície lateral é aberta em um retângulo. Por fim Teorema de Pitágoras diz que, num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma obtida pelos quadrados das medidas dos dois catetos.
Para verificar o trajeto a ser percorrido pela formiga, vamos fazer um recorte no segmento vertical AC do cilindro circular reto, no qual C é uma extremidade do diâmetro BC, obtendo a planificação abaixo.



Sabemos que as bases, superior e inferior, do cilindro são círculos com raios de mesma medida. Por outro lado, podemos observar que a superfície lateral deste cilindro é um retângulo.
Note, agora, que, no retângulo, o ponto A é um vértice inferior, C é um vértice superior pertencente a AC, enquanto B é o ponto médio lado do lado superior.
Lembre-se de que, num retângulo qualquer, os quatro ângulos internos são retos. Desta forma, fica claro que a menor distância entre os pontos A e B é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC.
Sabemos que AC = 6, pois equivale à medida da altura do cilindro. O segmento BC corresponde à metade do comprimento da base do cilindro. Como o comprimento de uma circunferência qualquer é calculado por

$$\text{comprimento} = 2\pi R,\ BC = \pi$$

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular AB, obtemos:

$$AB = \sqrt{\pi^2+36}$$

02. Os inteiros positivos x e y não têm divisores comuns maiores do que 1 e, além disso, xy = 300. Qual é o menor valor possível obtido em x + y?
a) 30
b) 35
c) 37
d) 56
e) 79

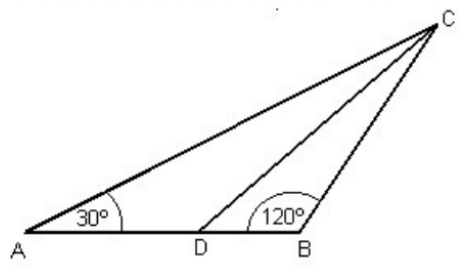
Resolução Questão 02: Alternativa C
Fatos que ajudam: dois números possuem divisores inteiros em comum quando ambos são múltiplos de um mesmo número. Este fato pode ser observado durante a decomposição simultânea, em fatores primos, de dois números distintos. O resultado da multiplicação de todos os divisores comuns de dois números é chamado de máximo divisor comum (MDC).
Sabemos que x e y representam números inteiros positivos tais que xy=300. Desta forma, para descobri-los, vamos fazer a decomposição de 300 em fatores primos.
Veja que 300 = $2^2 \times 3 \times 5^2$. Agora, recombinando os fatores desta decomposição, conseguimos obter todos os pares ordenados cujas multiplicações de seus valores resultam em 300:
(1; 300), (2; 150), (3; 100), (4; 75), (5; 60), (6; 50), (10; 30), (12; 25) e (15; 20).
Entretanto, como os números representados por x e y não têm divisores maiores do que 1 em comum, alguns dos pares ordenados mencionados anteriormente são descartados. Veja que 2 é divisor comum de 2 e 150; 5 é divisor comum de 5 e 60; 2 é divisor comum de 6 e 50; 2, 5 e 10 são divisores comuns de 10 e 30; 2 é divisor comum de 12 e 25; 5 é divisor comum de 15 e 20.
Logo os possíveis pares ordenados que descrevem os valores de x e y são:
(1; 300), (3; 100), (4; 75), (12; 25).
Portanto o menor valor possível de ser obtido em x + y é 12 + 25 = 37.

03. Para determinado inteiro positivo a, o resultado da soma $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a$ é um número cujos dígitos são todos iguais. Qual é o dígito que se repete?

a) 1
b) 3
c) 5
d) 9
e) Não se pode descobrir.

Resolução Questão 03: Alternativa C
Fatos que ajudam: números inteiros positivos coincidem com os naturais, ou seja, são aqueles utilizados para a contagem, por isso não incluem o zero: (1, 2, 3, ...). Números inteiros não negativos são todos aqueles que não possuem sinal negativo, por isso incluem o zero: (0, 1, 2, 3, ...).
Sabemos que o resultado de a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a = 45a é um número cujos dígitos são todos iguais. Observe, agora, que, fazendo a decomposição de 45 em fatores primos, obtemos 45 = $3^2 \times 5$. Logo o número representado por 45a pode ser reescrito como $3^2 \times 5 \times a$ e, portanto, é um múltiplo de 5. Lembre-se de que números que são múltiplos de 5 têm como último dígito o 0 ou o 5.
Temos, portanto, duas possibilidades de dígitos. Vamos analisá-las a seguir:
Se o último dígito do número resultante for 0, todos os outros dígitos serão, também, 0, logo resultado da adição a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a será 0, o que não é verdade, pois a é um inteiro positivo.
Desta forma, o último dígito do número resultante é 5 e, como todos os seus dígitos são iguais, o digito que se repete é o 5.

04. No triângulo ABC, desenhado abaixo, tem-se que $m(C\hat{A}B)=30^\circ$, $m(C\hat{B}A)=120^\circ$ e $\overrightarrow{CD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Qual é a razão $\frac{BC}{CD}$?



a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Resolução Questão 04: Alternativa C
Fatos que ajudam: num triângulo qualquer as medidas dos ângulos internos valem juntas 180°. Bissetriz é a semirreta que parte da origem de um ângulo e o divide em dois ângulos de mesma medida. Por fim, a lei dos senos relaciona os valores dos senos dos ângulos internos de um triângulo com as medidas dos respectivos lados do triângulo opostos a estes ângulos.
Observe que, no triângulo ABC, $m(A\hat{B}C)=30^\circ$, pois as medidas dos três ângulos internos deste triângulo valem juntas 180°. Agora, como CD é a bissetriz partindo do ponto C, então $m(A\hat{C}B)=15^\circ$, fazendo com que $m(B\hat{D}C)=45^\circ$.
Podemos, finalmente, aplicar a Lei dos Senos no triângulo BCD, para encontrarmos o valor da razão desejada:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ}=\frac{CD}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{BC}{CD}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

05. Seja $p(n)$ o resultado da multiplicação dos dígitos de um número natural n. Qual é o valor de $p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(100)$?

a) 1560
b) 1700
c) 2050
d) 2070
e) 5050

Resolução Questão 05: Alternativa D
Vamos fazer a adição dos 10 primeiros elementos de p(1) + p(2) + ... + p(100):
p(1) + p(2) + ... + p(9) + p(10) = 1 + 2 + ... + 9 + 1x0 = (1 + 2 + ... + 9).
Vamos repetir este cálculo com os próximos 10 elementos:
p(11) + p(12) + ... + p(19)+ p(20) = 1x1 + 1x2 + ...+ 1x9 + 2x0 = 1 x (1 + 2 + ... + 9).
Por fim, vamos realizar, novamente, este cálculo com mais 10 elementos:
p(21) + p(22) + ... + p(29) + p(30) = 2x1 +2x2 +...+ 2x9 +3x0 = 2 x (1 + 2 + … +9).
Através destes fatos, podemos observar um padrão nas adições em p(1) + p(2) + ... + p(100).
Observe que, a cada grupo de 10 elementos tomados na adição, partindo do segundo, temos o valor o primeiro dígito do primeiro número natural "n" do grupo multiplicando (1+2+...+10).
Portanto, quando organizamos p(1) + p(2) + ... + p(100) em grupos de adições de 10 elementos, obtemos:

p(1) + p(2) + ... + p(100) =
= (1 + 2 + ... + 9) + 1x(1 + 2 + ... + 9) + 2x(1 + 2 + ... + 9) +...+ 9x(1 + 2 + ...+ 9) =
= (1 + 2 + ... + 9) x (1 +1 + 2 + ... + 9) =
45x46= 2070.