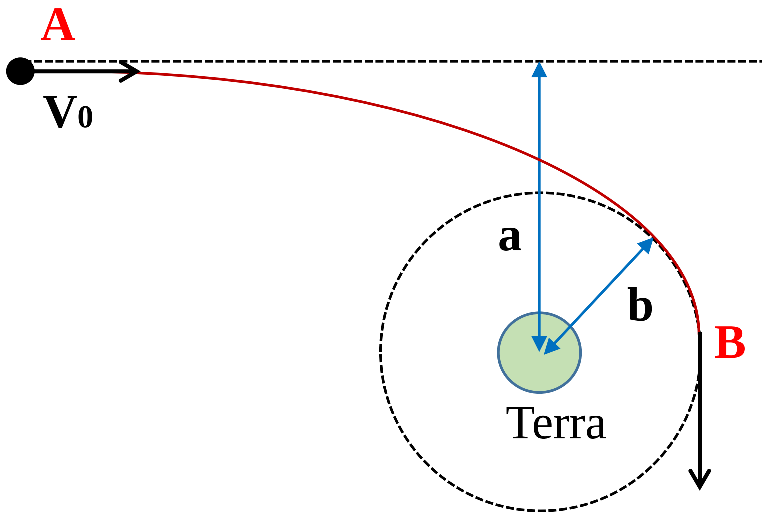
AULÃO ITA

FÍSICA
Prof. ANDERSON

olimpo

Questão 1 - Gravitação

Uma nave espacial chega a vizinhança da Terra (de massa M) seguindo uma órbita hiperbólica cuja assíntota dista **b** do centro da Terra. Quando a nave se encontrava a uma distância muito grande da Terra, sua velocidade era V_0. Qual a relação entre V_0, **a** e a distância de perigeu **b** ?



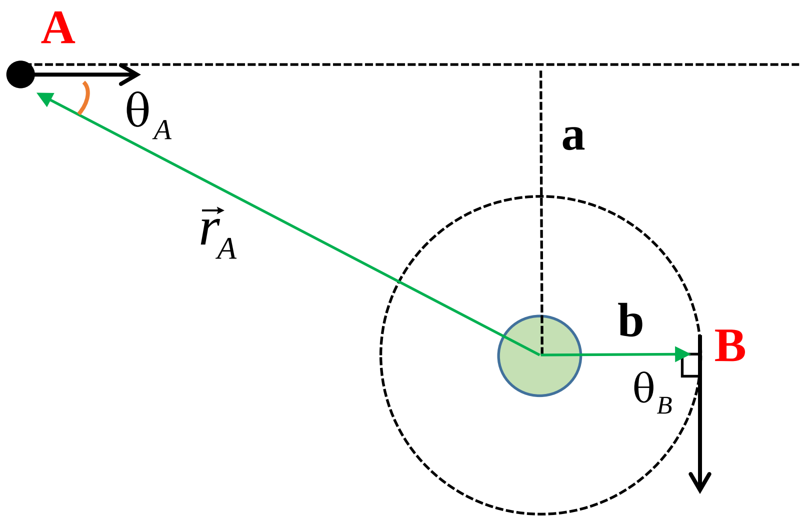
$$\begin{cases} \vec{L} = const \\ E_M = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \\ E_M = E_{pg} + E_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{L}\right| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\theta \\ E_M = E_{pg} + E_c = -\dfrac{GM\,m}{d} + \dfrac{mv^2}{2} \end{cases}$$

Conservação do Momento Angular:

$$L_A = L_B \Rightarrow m \cdot |\vec{r}_A| \cdot |\vec{v}_A| \cdot sen\,\theta_A = m \cdot |\vec{r}_B| \cdot |\vec{v}_B| \cdot sen\,\theta_B$$

Questão 1 - Gravitação



$$m\cdot|\vec{r}_A|\cdot|\vec{v}_A|\cdot sen\,\theta_A = m\cdot|\vec{r}_B|\cdot|\vec{v}_B|\cdot sen\,\theta_B$$

$$m\cdot a\cdot V_0 = m\cdot b\cdot v_B$$

$$v_B = \frac{a\cdot V_0}{b}$$

Conservação da Energia: $E_{M_A} = E_{M_B}$

$$E_{pg_A} + E_{c_A} = E_{pg_B} + E_{c_A}$$

$$-\frac{GM\,m}{a} + \frac{m v_A^2}{2} = -\frac{GM\,m}{b} + \frac{m v_B^2}{2}$$

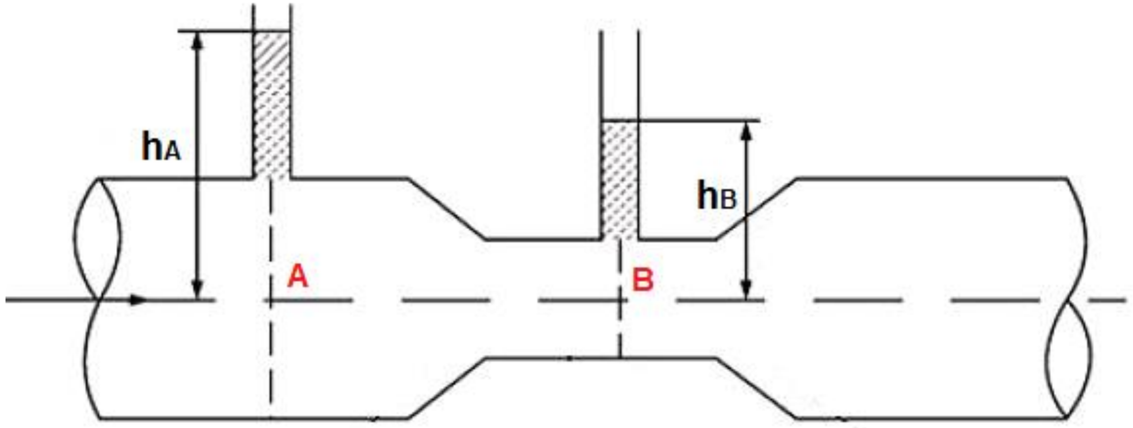
$$-\frac{GM}{a} + \frac{V_0^2}{2} = -\frac{GM}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{aV_0}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ V_0^2\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right) = \frac{2GM}{b}$$

Questão 2 - Hidrodinâmica

AULÃO ITA

Um tubo Venturi é inserido numa canalização provocando um desnível de 0,6 m. Um líquido de densidade igual a 1,2·10³ kg/m³ atravessa a canalização cuja seção de entrada tem área de 10 cm² e a seção do estrangulamento tem área de 5 cm². Adotando g = 10 m/s², calcule a vazão do líquido através da canalização.



Equação da Continuidade:

$$v_A A_A = v_B A_B \qquad v_B = \frac{v_A A_A}{A_B}$$

Equação de Bernoulli:

$$P_A + \rho g y_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g y_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

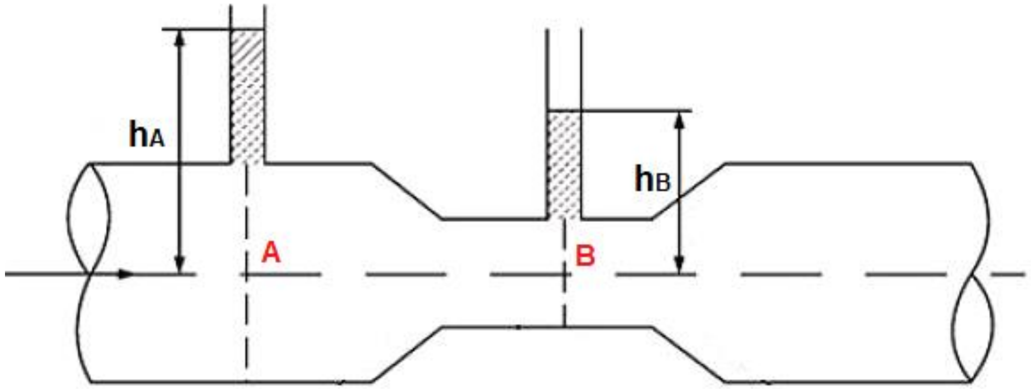
$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

Relação das pressões entre os pontos A e B:

$$\begin{cases} P_A = P_{atm} + \rho g h_A \\ P_B = P_{atm} + \rho g h_B \end{cases} \Rightarrow P_{atm} + \rho g h_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_{atm} + \rho g h_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

olimpo

Questão 2 - Hidrodinâmica



$$\Rightarrow P_{atm} + \rho g h_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_{atm} + \rho g h_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$\frac{\rho}{2}\left[v_A^2\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 - v_A^2\right] = \rho g \Delta h$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 - 1}}$$

Substituindo os dados do enunciado:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0,6}{\left(\frac{10}{5}\right)^2 - 1}} \Rightarrow v_A = 2\, m/s$$

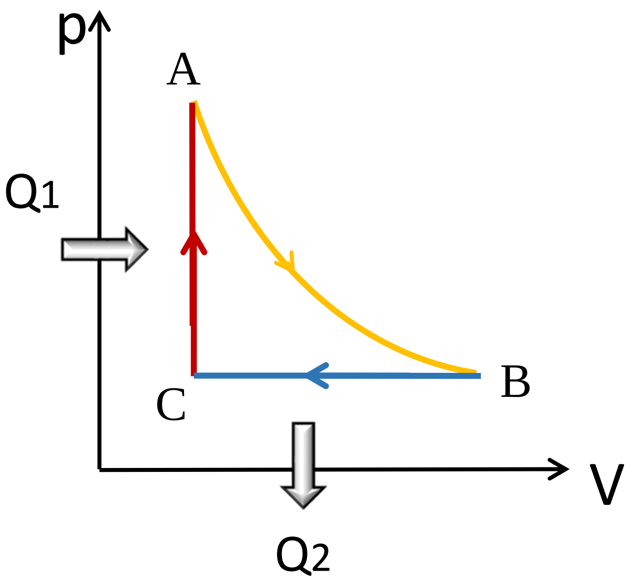
Vazão:

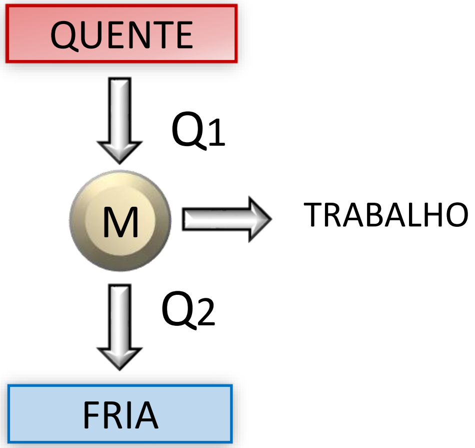
$$\Rightarrow Z = v_A \cdot A_A$$

$$Z = 2\, l/s$$

Questão 3 – Máquinas Térmicas

Um gás ideal com expoente adiabático descreve um ciclo termodinâmico no sentido horário segundo a sequência de transformações: adiabática, isobárica e isocórica. Determine o rendimento do ciclo, sabendo que na transformação adiabática o volume aumenta **a** vezes.





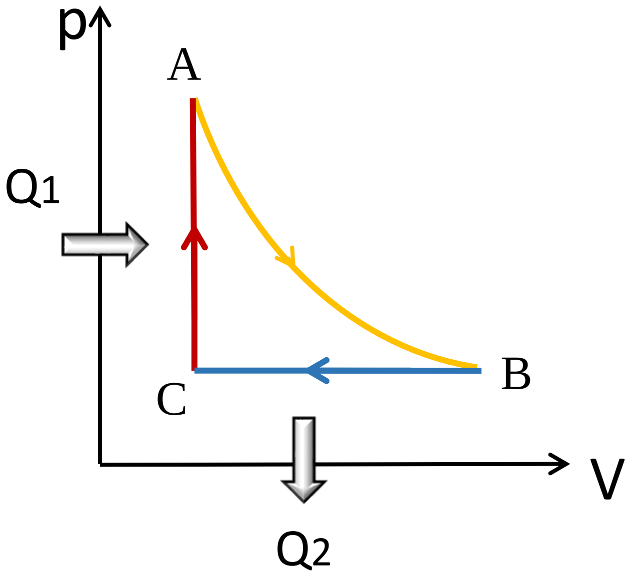
Rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Q1 : Aquecimento isovolumétrico $\quad |Q_1| = n \cdot c_v \cdot \Delta T_{AC} = n \cdot c_v \cdot (T_A - T_C)$

Q2 : Compressão isobárica $\quad |Q_2| = n \cdot c_p \cdot \Delta T_{BC} = n \cdot c_p \cdot (T_B - T_C)$

Questão 3 – Máquinas Térmicas



$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

$$\eta = 1 - \frac{n \cdot c_p \cdot (T_B - T_C)}{n \cdot c_v \cdot (T_A - T_C)} = 1 - \frac{\gamma (T_B - T_C)}{(T_A - T_C)}$$

Relação de temperaturas:

- Transf. Isobárica: $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{aV_C}{T_B} \Rightarrow T_B = aT_C$

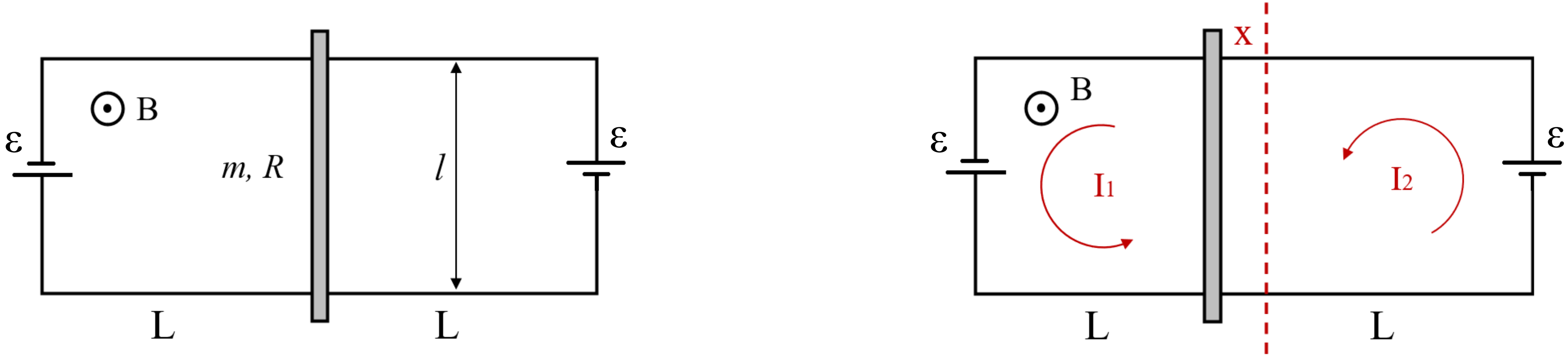
- Transf. Adiabática: $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B (aV_A)^{\gamma-1} \Rightarrow T_A = T_B\, a^{\gamma-1}$

Rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma(T_B - T_C)}{(T_A - T_C)} = 1 - \frac{\gamma(aT_C - T_C)}{(T_B a^{\gamma-1} - T_C)} = 1 - \frac{\gamma(aT_C - T_C)}{(aT_C \cdot a^{\gamma-1} - T_C)} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{\gamma(a-1)}{(a^\gamma - 1)}$$

Questão 4 – Magnetismo e MHS

Na figura temos dois trilhos paralelos de comprimento 2L cuja resistência por unidade de comprimento é dada por ρ. Um condutor de resistência R e massa m, repousa na metade dos trilhos em uma região onde existe um Campo Magnético B. Determine o período de pequenas oscilações induzidas em consequência de um deslocamento da barra. ε



Pelo método das correntes de Maxwell:

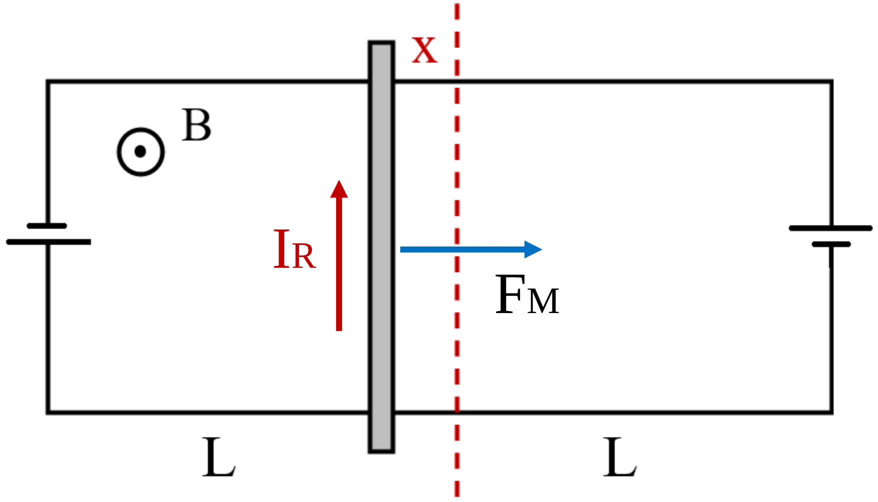
$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + \rho(2L - 2x)}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R + \rho(2L + 2x)}$$

$$\Rightarrow \quad I_R = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon x}{L(\rho L + R)}$$

Questão 4 – Magnetismo e MHS/

AULÃO ITA



Força Magnética = Força Restauradora

$$F_{rest} = -k\,x$$

$$-B \cdot I_R \cdot l \cdot sen\,\theta = -k\,x$$

$$B \cdot \frac{\varepsilon\,x}{L(\rho L + R)} \cdot l = m\,\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{B}{m}\frac{\varepsilon}{L(\rho L + R)} \cdot l$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{B}{m}\frac{\varepsilon\,l}{L(\rho L + R)} \qquad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon\,lB}{m\,L(\rho\,L + R)}}$$

olimpo

AULÃO ITA

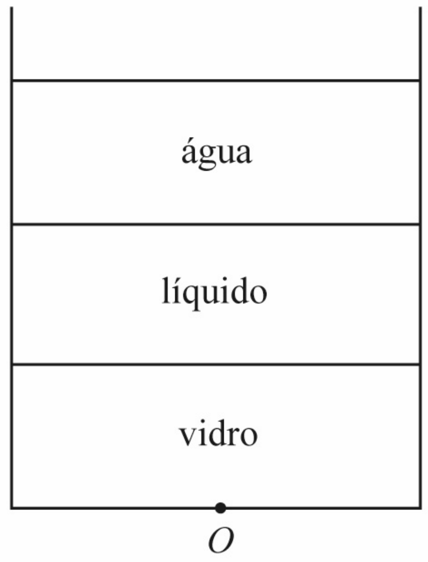
FÍSICA
Prof. RODOLFO

olimpo

Questão 1 – Associação de dioptros planos

AULÃO ITA

Um tanque contém uma camada de vidro de 8,0 cm de espessura e índice de refração 1,6. Logo acima há uma camada de 4,5 cm de um líquido de índice de refração 1,5. Por cima, existe uma camada de água de 6,0 cm de espessura e índice de refração 4/3. Para um observador olhando de cima, determine a profundidade aparente de uma marca *O*, feita no fundo do tanque.

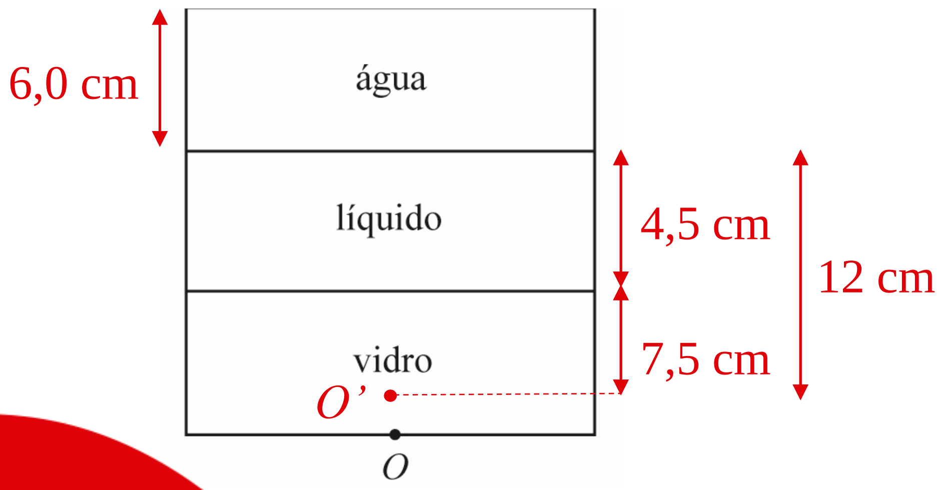


olimpo

Índices de refração: $\begin{cases} vidro: 1{,}6 \\ líquido: 1{,}5 \\ água: 4/3 \\ ar: 1{,}0 \end{cases}$

Uma possível resolução consiste em usar três vezes a equação do dioptro plano. Dioptro vidro-líquido:

$$\frac{n_L}{n_V} = \frac{p_L}{p_V} \Rightarrow \frac{1{,}5}{1{,}6} = \frac{\mathrm{p_L}}{8{,}0} \Rightarrow p_L = 7{,}5\ cm$$



Dioptro líquido-água:

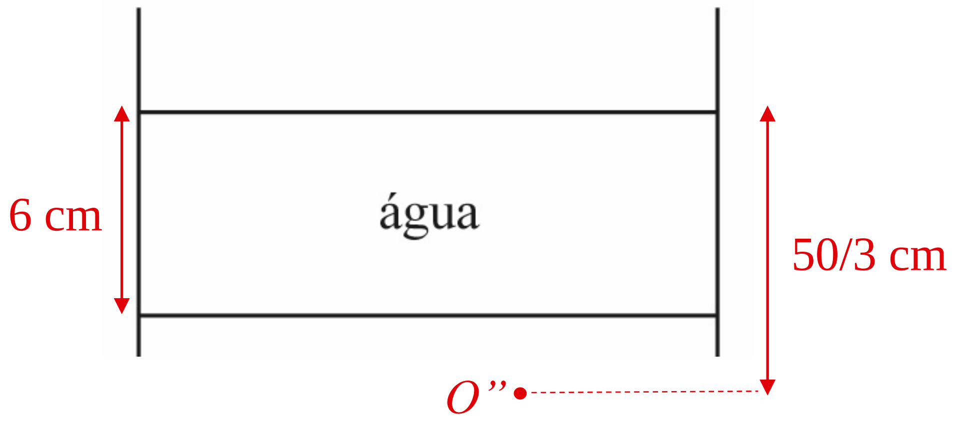
$$\frac{n_A}{n_L} = \frac{p_A}{p_L{}'} \Rightarrow \frac{4/3}{1{,}5} = \frac{\mathrm{p_A}}{12} \Rightarrow p_A = \frac{16}{1{,}5}\ cm$$

Logo, a profundidade aparente em relação à interface água-ar será

$$p'_A = \frac{16}{1{,}5} + 6{,}0 = \frac{50}{3}\ cm$$

Dioptro água-ar:

$$\frac{n_0}{n_A} = \frac{p_0}{p_A{}'} \Rightarrow \frac{1}{4/3} = \frac{p_0}{50/3} \Rightarrow p_0 = 12{,}5\ cm$$

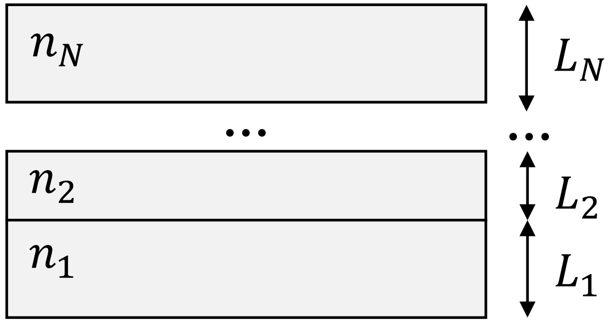


E se houvesse muitas camadas intermediárias, existe uma maneira mais rápida de resolver?

Sim!

Associação de múltiplos dioptros planos

Seja uma associação de N camadas, cada uma com índice de refração n_i e comprimento L_i



Aplicando sucessivas vezes a equação do dioptro plano, podemos obter uma equação generalizada:

$$\boxed{p_{real} - p_{aparente} = \sum \left(1 - \frac{n_0}{n_i}\right) L_i}$$

No exercício resolvido, teríamos:

$$p_{real} - p_{aparente} = \left(1 - \frac{1{,}0}{1{,}6}\right) 8{,}0 + \left(1 - \frac{1}{1{,}5}\right) 4{,}5 + 1\left(-\frac{3}{4}\right) 6{,}0 = 6{,}0$$

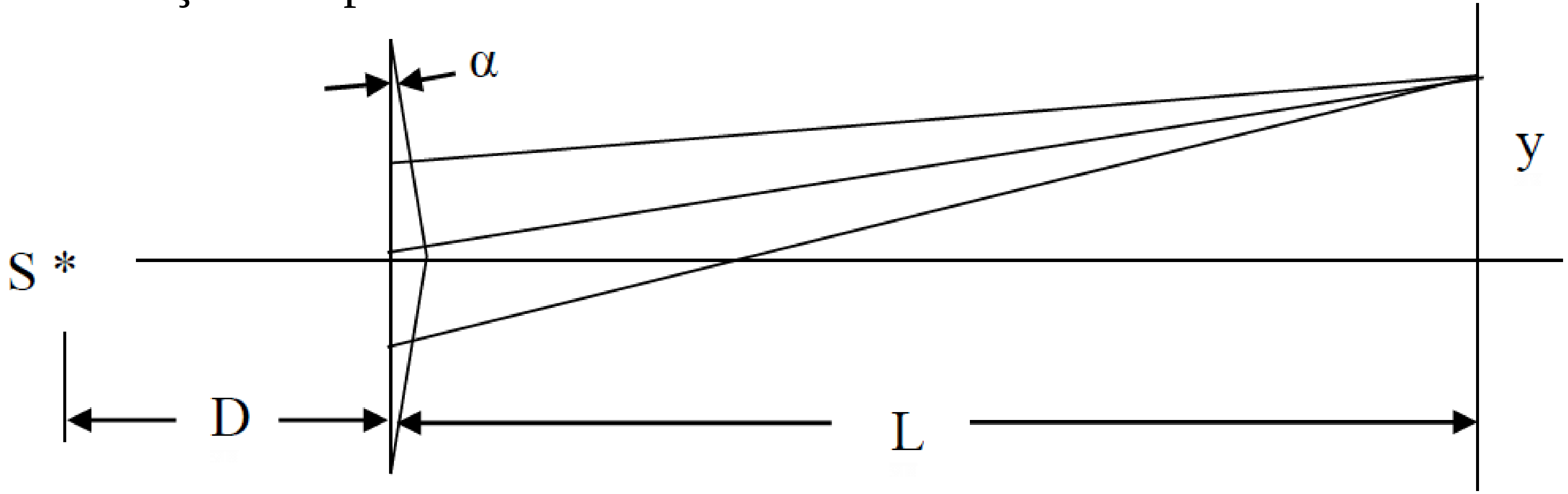
Logo:

$$18{,}5 - p_{aparente} = 6{,}0$$

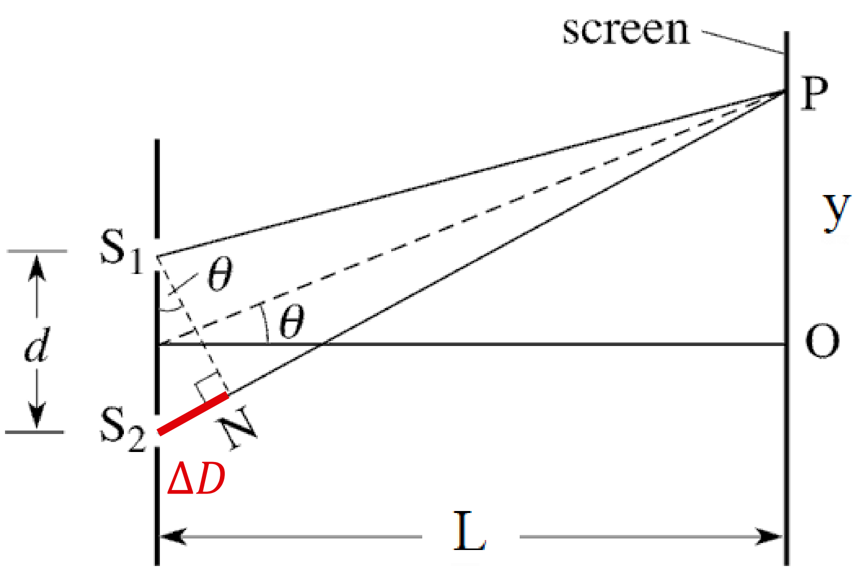
$$p_{aparente} = 12{,}5\ cm$$

Questão 2 – Experimento de Young com prismas

Uma fonte de luz S, de comprimento de onda λ, encontra-se a uma distância D das faces dos prismas delgados, conforme mostra a figura. Os prismas possuem ângulo de abertura α, pequeno, e índice de refração n. Os raios de luz da fonte S são desviados pelos prismas e formam um padrão de interferência em um anteparo distante L da fonte luminosa. Calcule a distância y entre duas franjas de interferência claras em função dos parâmetros fornecidos.



Relembrando o Experimento de Young "normal"



Diferença de caminhos entre as fontes S_1 e S_2:

$$\Delta \mathrm{D} = \mathrm{d}\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Aproximação para ângulos pequenos:

$$\mathrm{sen}\ \theta \cong \tan \theta$$

$$\frac{\Delta D}{d} = \frac{y}{L}$$

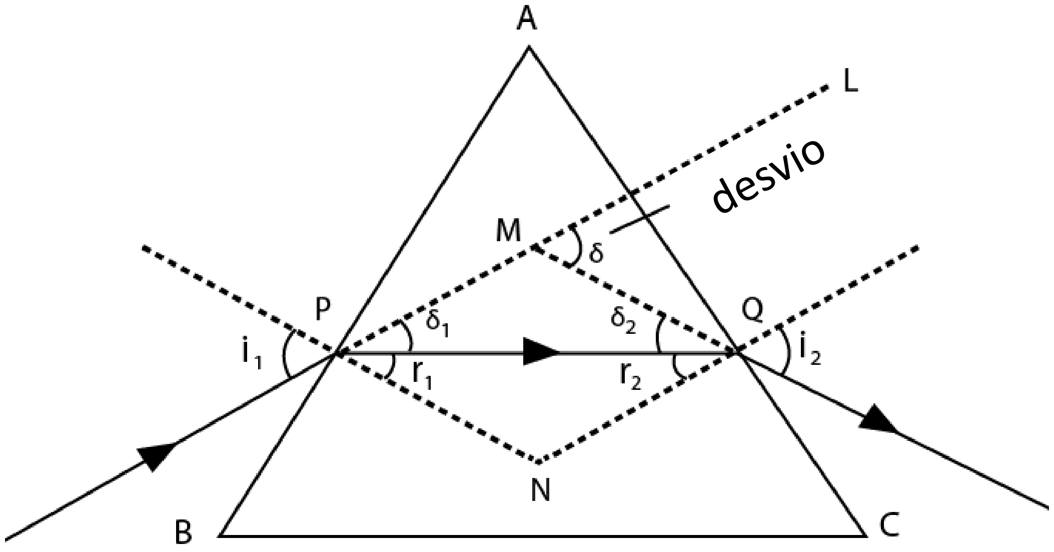
Para a distância entre dois máximos consecutivos, temos

$$\Delta D = \lambda$$

Logo:

$$y = \frac{\lambda L}{d}$$

Desvio em um prisma delgado



Pares de retas perpendiculares determinam ângulos iguais:

$$A = r_1 + r_2$$

Ângulo externo do ΔPMQ:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2)$$

Para uma incidência aproximadamente normal, vale a aproximação:

$$\text{sen}\, i_1 \cong i_1 \;\; e \;\; \text{sen}\, i_2 \cong i_2$$

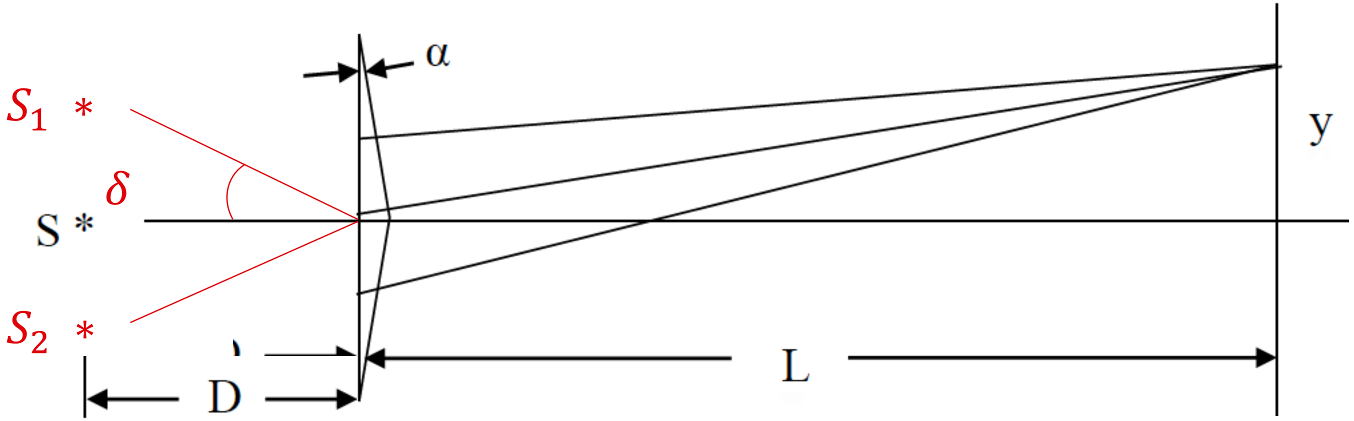
Lei de Snell (prisma imerso no ar):

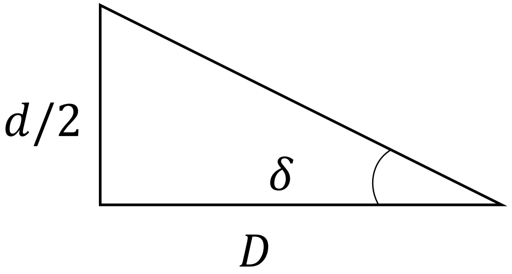
$$1 \cdot i_1 = n \cdot r_1 \quad e \quad n \cdot r_2 = 1 \cdot i_2$$

Logo, o desvio vale

$$\delta = n(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)$$

$$\boxed{\delta = (n-1)\alpha}$$





Separação entre as imagens S_1 e S_2:

$$\tan\delta = \frac{d/2}{D} \Rightarrow d = 2D\tan\delta$$

Aproximação para ângulos pequenos:

$$\tan\delta \cong \delta \Rightarrow d = 2D\delta = 2D(n-1)\alpha$$

Logo, a distância y vale

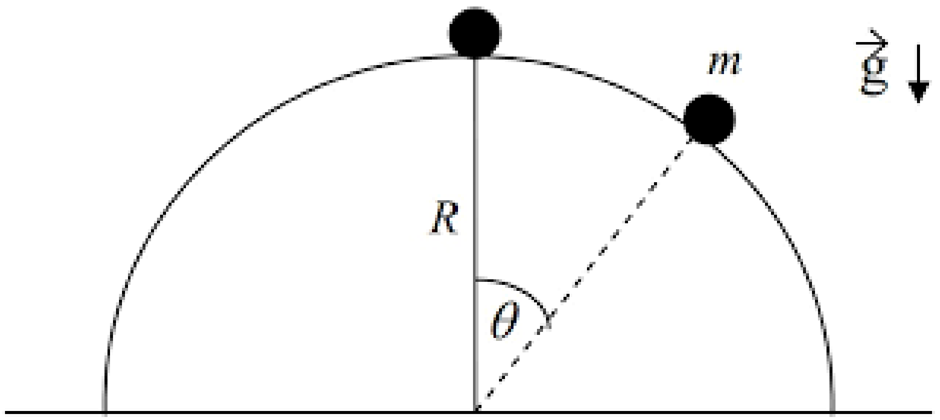
$$y = \frac{\lambda L}{d}$$

$$\boxed{y = \frac{\lambda L}{2D(n-1)\alpha}}$$

Questão 3 – Partícula sobre hemisfério

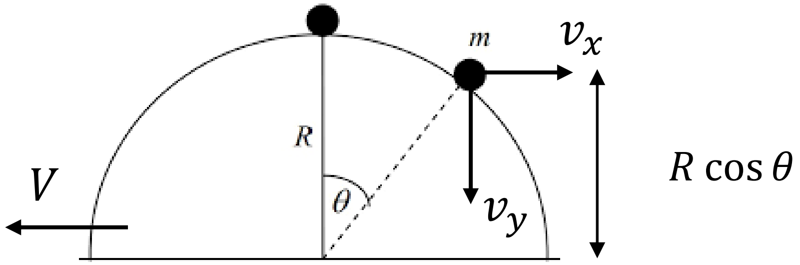
AULÃO ITA

Uma partícula de massa m é posicionada no topo de uma superfície semiesférica de raio R e massa M, conforme mostrado na figura. Um leve deslocamento faz com que a partícula comece a deslizar sem atrito na superfície, sujeita à ação da gravidade local g. Se também não existe atrito entre a semiesfera e a superfície horizontal, encontre uma expressão que relacione o ângulo θ em que a partícula perde contato com a superfície com os demais parâmetros do problema.



olimpo

Seja V a velocidade adquirida pelo hemisfério e v_x a componente horizontal da velocidade adquirida pela partícula no referencial do solo. Da conservação do momento na horizontal:

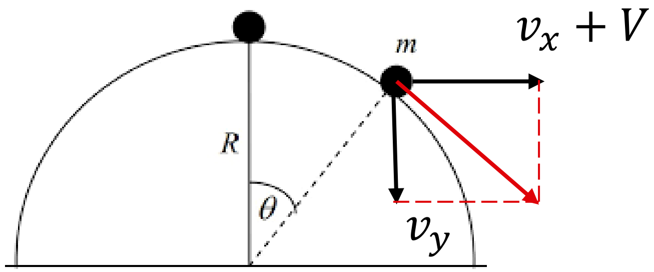


$$MV = mv_x \quad (1)$$

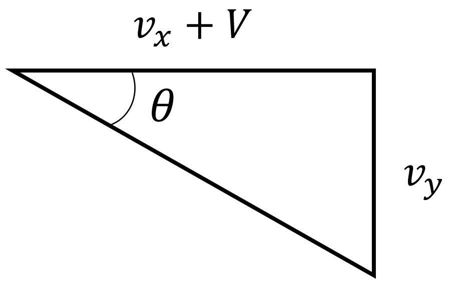
Conservação da energia:

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) \quad (2)$$

Analisemos agora o problema no referencial da semiesfera. Neste referencial, a trajetória da partícula é circular, sendo sua velocidade total tangente à superfície:



Observe o triângulo de velocidades:



$$\tan\theta = \frac{v_y}{V + v_x} \Rightarrow v_y = (V + v_x)\tan\theta$$

Usando o resultado (1):

$$v_y = v_x\left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\theta \quad (3)$$

Substituindo (1) e (3) em (2):

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{M}{2}\left(\frac{m}{M}v_x\right)^2 + \frac{m}{2}v_x^2\left[1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2\theta\right]$$

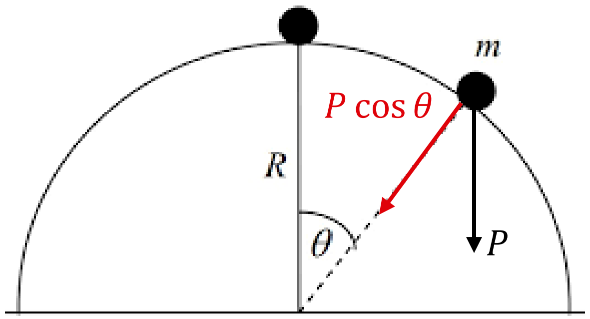
$$2gR(1 - \cos\theta) = \frac{m}{M}v_x^2 + v_x^2 + v_x^2\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2\theta$$

Seja $k = m/M$, temos

$$2gR(1 - \cos\theta) = v_x^2(1 + k)[1 + (1 + k)\tan^2\theta] \quad (4)$$

AULÃO ITA

No momento em que a partícula perde o contato com a superfície, a semiesfera deixa de ser um referencial não inercial e uma componente do peso da partícula faz o papel de centrípeta:



$$mg\cos\theta = \frac{m\left[(V + v_x)^2 + v_y^2\right]}{R}$$

Substituindo os resultados encontrados de V e v_y:

$$gR\cos\theta = v_x^2(1+k)^2(1+\tan^2\theta) \quad (5)$$

Dividindo a equação (4) pela (5):

$$\frac{2gR(1-\cos\theta)}{gR\cos\theta} = \frac{v_x^2(1+k)[1+(1+k)\tan^2\theta]}{v_x^2(1+k)^2(1+\tan^2\theta)}$$

$$\frac{2(1-\cos\theta)}{\cos\theta} = \frac{1+(1+k)\tan^2\theta}{(1+k)(1+\tan^2\theta)}$$

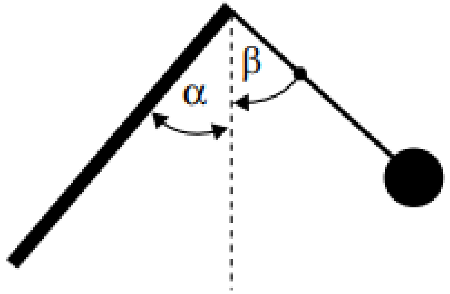
Fazendo as substituições $k = m/M$ e $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$:

$$\boxed{3\sec^2\theta - 2\sec^3\theta = \frac{m}{M+m}}$$

olimpo

Questão 4 – MHS interrompido

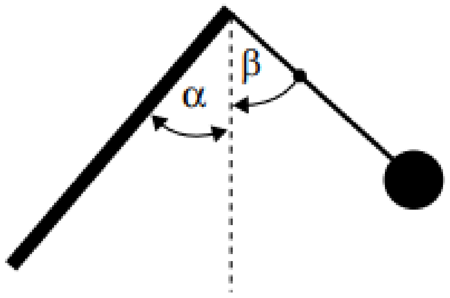
Ao ponto de uma parede que forma um pequeno ângulo α(alpha) com a vertical prende-se, através de um fio de comprimento L, uma bola. Logo, inclina-se o fio com a bola de um pequeno ângulo β ($\beta > \alpha$) e solta-se. Considerando absolutamente elástico o choque da bola contra a parede, encontre o período das oscilações desse pêndulo. A aceleração da gravidade vale g.

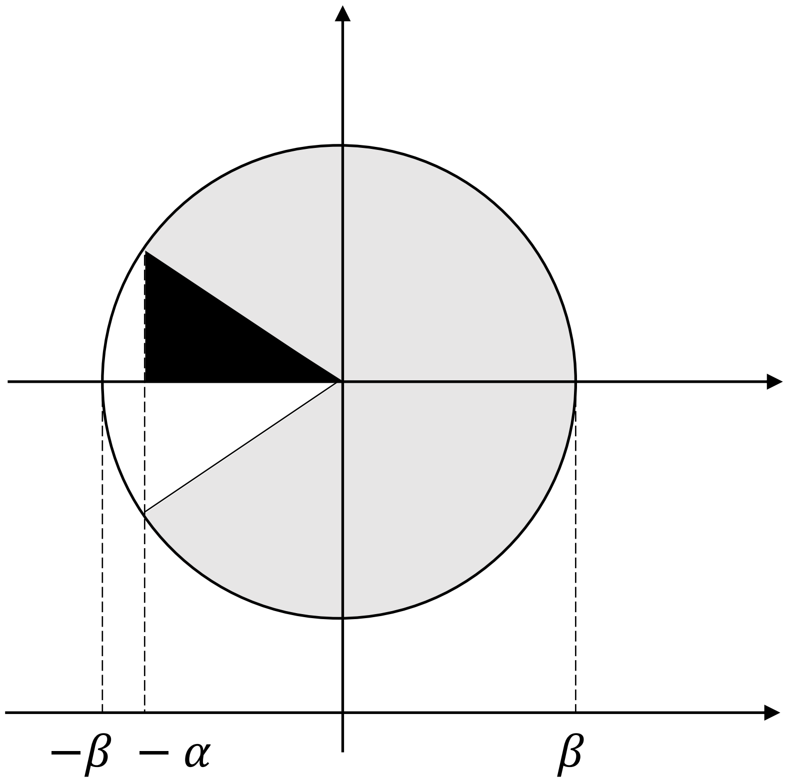


Período caso não houvesse a parede:

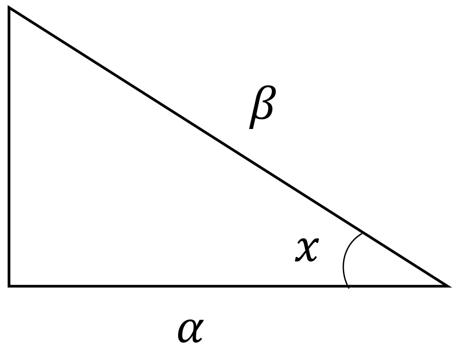
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Devido à colisão elástica, a bolinha pula o trecho $-\alpha \rightarrow -\beta \rightarrow -\alpha$. O MCU cuja projeção gera o MHS pode nos ajudar a visualizar o problema:





$$\theta = \beta\cos(\omega t)$$



$$x = \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

O tempo que deve ser subtraído do período original corresponde a um deslocamento de $2x$. Usando uma simples regra de três, temos que

$$t_{2x} = \frac{2x}{2\pi}T_0 = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)T_0$$

Finalmente, podemos calcular o período real:

$$T = T_0 - t_{2x} = T_0\left[1 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{L}{g}}\left[2\pi - 2\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]}$$

Ou, caso opte pela função $\operatorname{arcsen} x$, basta lembrar que $\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \pi/2$:

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{L}{g}}\left[\pi + 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]}$$

AULÃO ITA

olimpo